Un T.D. de folie !!!

« T.D. » signifie Travail Dirigé. Il s'agit d'une séance au cours de laquelle un enseignant est chargé de discuter la résolution d'exercices avec des élèves. Aujourd'hui, dans notre CVSP (traduction : « classe virtuelle sur papier »), nous allons travailler un truc vraiment **i-g-n-o-b-l-e :** ***le calcul de la différentielle d'une fonction composée*** (rien que le nom fait peur…).

Normalement, pour des jeunes d'un bon niveau, ce type de calcul est **é-l-é-m-e-n-t-a-i-r-e**, si vous avez besoin de cette fiche pour mieux comprendre, vous devez savoir que **vous êtes v-r-a-i-m-e-n-t nul(le)** !! Moi, j'ai juste mis… 20 ou 30 années à bien comprendre ce genre de calcul (je m'avance peut-être un peu en disant que j'ai vraiment compris… mais bon…) mais **vous**, l'avenir de notre nation, vous devez comprendre ça un peu plus vite bon sang !!

Bon, passons à l'action après ces quelques considérations introductives…

I $\quad \boldsymbol{f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}} \qquad \boldsymbol{g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ xy \end{pmatrix}}$

Calculons la différentielle, au point de coordonnées (x,y), de la composée $F = g \circ f$.

Nous allons passer en revue trois méthodes ! (d'où le titre de cette fiche… qui d'ailleurs n'a aucun rapport avec certains problèmes récents de connexion à l'application Zoom… dont d'ailleurs, je suis un expert reconnu…)

1) Calcul « direct »

Calculons d'abord l'expression de $F(x,y)$.

On a : $F(x,y) = (g \circ f)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ab \end{pmatrix}$ avec $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Ainsi : $F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ (x^2)(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x^3 y \end{pmatrix}$

On peut alors calculer la différentielle de F au point (x,y) en utilisant la formule :

$$dF_{(x,y)}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial (x^3 y)}{\partial x} & \frac{\partial (x^3 y)}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3x^2 y & x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Au final : $dF_{(x,y)}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 y\, h_1 + x^3\, h_2 \end{pmatrix}$ Astuce perso : pour ne pas me tromper dans tous les termes dans, je prononce : « différentielle de F calculée au point (x,y) dans la direction $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ ».

2) Calcul par le théorème de composition **(très cool !!)**

D'après le cours, on a : couleur adaptée à la coolitude…

$$dF_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = d(g\circ f)_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = dg_{f(x,y)}\circ df_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = dg_{f(x,y)}\left(df_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right)$$

Calculons d'abord : $df_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial(x^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2)}{\partial y}\\ \frac{\partial(xy)}{\partial x} & \frac{\partial(xy)}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & 0\\ y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\,h_1\\ y\,h_1 + x\,h_2\end{pmatrix}$

Calculons ensuite : $dg_{(X,Y)}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial 1}{\partial X} & \frac{\partial 1}{\partial Y}\\ \frac{\partial 1}{\partial X} & \frac{\partial 1}{\partial Y}\\ \frac{\partial(XY)}{\partial X} & \frac{\partial(XY)}{\partial Y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ notez le $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ qui est une notation intermédiaire que l'on remplacera ensuite par le vecteur calculé juste ci-dessus

Donc : $dg_{(X,Y)}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ Y & X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ Y\,u_1 + X\,u_2\end{pmatrix}$ que l'on doit exprimer au point de coordonnées $(X,Y) = f(x,y) = (x^2, xy)$

Ainsi : $dg_{f(x,y)}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ xy\,u_1 + x^2\,u_2\end{pmatrix}$

Enfin, on remplace $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix}2x\,h_1\\ y\,h_1 + x\,h_2\end{pmatrix}$ comme je vous le disais au-dessus (écoutez un peu quand même au fond de la classe là, toujours les mêmes, pfff…..)

D'où : $dF_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = d(g\circ f)_{(x,y)}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ xy\,(2x\,h_1) + x^2\,(y\,h_1 + x\,h_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ 3x^2y\,h_1 + x^3\,h_2\end{pmatrix}$

On retrouve bien le résultat obtenu en 1) (ce qui est rassurant…).

3) Calcul par les matrices Jacobiennes

On rappelle tout d'abord la formule vue en cours : $J(g\circ f)_{(x,y)} = J(g)_{f(x,y)}\,J(f)_{(x,y)}$

Traduction par Google : « la matrice Jacobienne de la fonction composée $g\circ f$ calculée au point (x,y) est égale au produit des matrices Jacobiennes d'une part, de la fonction g calculée (comprendre que c'est la matrice qui est calculée) au point $f(x,y)$, et d'autre part, de la fonction f calculée (comprendre aussi que c'est la matrice qui est calculée) au point (x,y) ».

Conseil : lire cette phrase à haute voix pour bien la comprendre… et avec la formule !

Remarque : on peut aussi écrire sans les parenthèses : $J\,g\circ f_{(x,y)} = J\,g_{f(x,y)}\,J\,f_{(x,y)}$

Donc, il faut calculer tranquillement :

$J\,f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ facile ici…

puis : $J\,g_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Y & X \end{pmatrix}$ qui donne en $(X,Y) = f(x,y)$ la matrice : $J\,g_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$

Enfin, il reste le produit à effectuer :

$$J\,g \circ f_{(x,y)} = J\,g_{f(x,y)}\,J\,f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3x^2y & x^3 \end{pmatrix}$$

Et pour finir, on pourrait calculer :

$$dF_{(x,y)}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = J\,g \circ f_{(x,y)}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3x^2y & x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2y\,h_1 + x^3\,h_2 \end{pmatrix}$$

A ce stade, j'espère que c'est plus clair pour vous… sinon, allez voir votre « prof » de T.D. (moi, j'ai autre chose à faire que de vous expliquer toutes ces choses si simples !!). (humour…)

Un autre petit exercice pour la route ??

II Calculons $\varphi'(t)$ lorsque $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$

Prenons au hasard : $f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln(x^2 + y^2 + z^2)$ et $x(t) = cos(t)$, $y(t) = sin(t)$ et enfin pourquoi pas….. $z(t) = tan(t)$ (pourquoi pas ?! c'est juste un exemple…)

1) Règle de la chaîne

Dans un tel cas, le cours donne directement :

$$\varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t), z(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t), z(t)\big) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}\big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

Alors, avec par exemple : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ qui donne ensuite $\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \frac{cos(t)}{1+tan^2(t)}$

Au final, on obtient :

$$\varphi'(t) = -\,sin(t)\,\frac{cos(t)}{1+tan^2(t)} + cos(t)\,\frac{sin(t)}{1+tan^2(t)} + \big(1+tan^2(t)\big)\,\frac{tan(t)}{1+tan^2(t)} = tan(t)$$

Remarque : dérivée valable uniquement sur $\mathbb{R}$ privé d'un ou deux points tels que $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ par exemple…

2) Avec une différentielle sympathique…

Rappel : dans tout bon cours (sauf bien sûr, ceux consacrés : à la culture des aubergines (voir photo ci-contre pour les habitués du fast-food), aux liens étroits existants entre François 1er et Léonard de Vinci, à l'influence gravitationnelle des trous noirs sur certains cinéastes, au soufflage du verre destiné à un sablier, …), on peut lire que la différentielle d'une fonction φ de la seule variable t se calcule selon la formule : $\boldsymbol{d\varphi_t(h) = \varphi'(t)\, h}$

Conclusion de cette remarque : « il suffit » de calculer la différentielle de notre fonction φ pour ensuite en déduire sa différentielle ! (facile à dire, mais pas facile à faire !)

Regardons alors la fonction φ comme la composition de deux fonctions :

$$f : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2} ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{et} \quad g : t \longmapsto (\cos(t), \sin(t), \tan(t))$$

On a donc : $\varphi(t) = f \circ g(t)$

On peut alors écrire :

$$d\varphi_t(h) = df_{g(t)} \circ dg_{(t)}(h) = df_{g(t)}(dg_{(t)}(h))$$

Avec : $dg_{(t)}(h) = (-\sin(t), \cos(t), 1 + tan^2(t))\, h = (-\sin(t)\, h, \cos(t)\, h, (1 + tan^2(t))h)$

et : $df_A\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A)\right) . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ ou aussi : $\overrightarrow{grad} f(A) . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

avec le point A défini par les coordonnées $A = g(t) = (\cos(t), \sin(t), \tan(t))$

ainsi : $df_{g(t)}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{g(t)} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{g(t)} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{g(t)} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{cos(t)}{1+tan^2(t)} \\ \frac{sin(t)}{1+tan^2(t)} \\ \frac{tan(t)}{1+tan^2(t)} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

enfin, avec $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t)\, h \\ \cos(t)\, h \\ (1 + tan^2(t))\, h \end{pmatrix}$ on a : $d\varphi_t(h) = \begin{pmatrix} \frac{cos(t)}{1+tan^2(t)} \\ \frac{sin(t)}{1+tan^2(t)} \\ \frac{tan(t)}{1+tan^2(t)} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sin(t)\, h \\ \cos(t)\, h \\ (1 + tan^2(t))h \end{pmatrix}$

ou encore : $d\varphi_t(h) = \left(\frac{cos(t)}{1+tan^2(t)}(-\sin(t)) + \frac{sin(t)}{1+tan^2(t)}\cos(t) + \frac{tan(t)}{1+tan^2(t)}(1 + tan^2(t))\right) h$

simplifiée : $d\varphi_t(h) = \tan(t)\ h$

Ce qui donne enfin, compte tenu du rappel dit « des aubergines » : $\varphi'(t) = \tan(t)$

Conclusion de toute cette affaire : vous voilà « ok » pour le prochain T.D. !!!

Le prof qui a tapé ces pages ce week-end n'exclut pas une ou deux petites erreurs de frappe ! Soyez cool !!