

Au fait, c'est quoi « être mathématicien » ?

Remarque : Etant de sexe masculin, ce texte sera rédigé en tant que tel, mais bien sûr, il va de soi que tout ce qui suit se conjugue également au féminin !

Que fait-il de sa journée, assis sur sa chaise ?

Pourquoi semble-t-il si angoissé aujourd'hui ?

Vu son air grognon, il est encore aux prises avec une équation insoluble !

Tiens, vu son air joyeux ce matin, la soirée a dû lui apporter la solution !!

Comment a-t-il fait pour s'en sortir ?

Nous allons tenter d'y voir plus clair en utilisant un exemple de calcul qui m'a personnellement pas mal torturé ! On va faire *comme si* nous suivions un vrai mathématicien (ce que je ne suis pas d'ailleurs...) au cours de quelques heures, en espionnant son cerveau, pour mieux comprendre sa façon de travailler et ce qui se passe dans sa tête. Vous aurez ainsi des éléments de réponse à l'intéressante question posée tout en haut...

Même si vous n'arrivez pas à suivre parfaitement tous les calculs, la démarche générale devrait être compréhensible (du moins, je l'espère). Cette exploration sera basée sur l'étude d'une jolie formule liée aux intégrales curvilignes : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(B) - f(A)$. Au passage, ceux qui sont aussi aux prises avec cette partie de cours apprendront peut-être deux ou trois choses !

Une chose doit être claire dès le départ.

Un mathématicien n'est que rarement une personne isolée travaillant dans sa cabane comme Grigori Perelman. En général, il travaille au sein d'une équipe avec qui il échange des idées. Sinon, il risque de tourner en rond et de perdre la raison. Le cas de Georg Cantor est célèbre à cet égard. Son isolement fut sûrement une épreuve terrible à vivre...

Donc, je remercie ici ma cheffe Sophie pour son soutien, sans elle, ce qui suit serait probablement resté longtemps à tourner en rond dans un coin de mon cerveau...

Introduction au contexte mathématique

Tournez la page s'il vous plaît...

Nous allons travailler avec une relation assez riche pour faire naître pas mal de questions, l'essence même du travail du « matheux » ! Pour mieux entrer dans le sujet, quelques petits rappels ne feront donc pas de mal, car le niveau requis n'est pas si simple...

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(B) - f(A)$$

Comment comprendre ceci ?

- \int est le symbole de l'intégrale. On l'utilise pour faire la somme de certaines quantités notées juste derrière lui.
- γ est le symbole d'un chemin dessiné ici dans le plan. Il part d'un point A pour aller jusqu'à un point B . Eventuellement, le chemin peut être fermé lorsque $A = B$.
- \vec{V} est un vecteur défini selon une formule liée aux coordonnées du point du plan $M(x, y)$ où il est exprimé. On parle souvent de « champ de vecteurs ».
- $\overrightarrow{d\ell}$ est un tout petit déplacement dans le plan (aussi un vecteur). On dit « déplacement élémentaire ». Sa formule est $\overrightarrow{d\ell} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$ avec dx un déplacement élémentaire sur l'axe des x et bien sûr, dy est un déplacement élémentaire sur l'axe des y !
- $\vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ est le « produit scalaire » entre les deux vecteurs introduits ci-dessus. Un physicien pourrait interpréter cette expression comme la petite quantité d'énergie mise en jeu au cours du déplacement d'une particule soumise à une force \vec{V} le long d'un petit déplacement $\overrightarrow{d\ell}$. Ce produit scalaire est très particulier, car un des vecteurs est lié à un déplacement élémentaire. On l'appelle une « forme différentielle », notée ω en général.
- f représente la primitive de la forme différentielle ω . Notons en passant qu'une forme différentielle n'admet pas toujours de primitive. Nous allons y revenir tout de suite...

Que dit cette belle formule ?

La formule raconte que « l'intégrale de la forme différentielle $\vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ le long du chemin γ est égale à f calculée en B moins f calculée en A ». Son intérêt réside dans le fait suivant : le résultat ne dépend pas du chemin suivi entre A et B . On peut ainsi calculer l'intégrale le long d'un chemin très simple pour se faciliter le calcul... ou alors, on trouve une primitive f et on finalise le calcul en appliquant la formule.

Comment savoir si une forme différentielle $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ admet une primitive ? Les fonctions P et Q doivent vérifier la relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et de plus, le domaine sur lequel on travaille doit être étoilé (encore une notion à expliquer...).

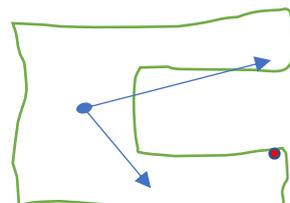
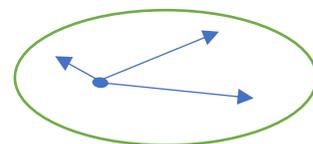
Là, vous commencez à entrevoir la difficulté du travail du mathématicien : il est entouré de nombreux concepts abstraits, se mélangeant de manière subtile au sein d'un même problème complexe (dans notre cas : une équation ne comportant que peu de symboles !). Ses réflexions portent sur des cas bien plus complexes qu'un simple tableau de proportionnalité !

Poursuivons donc cette introduction avec l'affaire du domaine « étoilé ».

Le chemin γ doit se trouver dans un domaine du plan qui soit « d'un seul tenant » et qui doit vérifier une propriété bizarre : il doit exister un point qui puisse potentiellement « voir » en ligne droite tous les autres points du domaine.

Les deux exemples suivants vont être plus parlants :

- l'ellipse est un domaine étoilé car : on peut trouver un point M (en bleu) d'où on peut rejoindre n'importe quel autre point du domaine avec une ligne droite (ou une flèche) qui reste dans le domaine. La figure montre trois exemples.
- Le domaine ci-contre n'est pas étoilé. En effet, vous ne pourrez pas trouver un point M pouvant relier en ligne droite n'importe quel autre point. Pour certains, la ligne droite tracée devra sortir du domaine délimité par le contour vert... Exemple proposé :



Vous pouvez vous amuser à trouver un point M plus performant (il sera sûrement tout à gauche et centré sur la hauteur... mais il restera des zones du domaine inaccessibles en ligne droite. En particulier le point rouge !!

Pour finir cette introduction, voici un exemple de calcul simple.

Soit $\vec{V} = 2x \vec{i} + 3y^2 \vec{j}$, le chemin γ en ligne droite de $A(1 ; 2)$ vers $B(2 ; 4)$.

Dans le cas général où $\vec{V} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$, l'intégrale dite « curviligne » notée $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ se calcule selon : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$.

Pour notre exemple, on choisit de paramétrer la ligne droite avec $x(t) = t$ et $y(t) = 2t$ avec t dans $[a ; b] = [1 ; 2]$. Ainsi : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_a^b 2t \times 1 + 3(2t)^2 \times 2 dt = \int_1^2 2t + 24 t^2 dt$

Au final, on obtient : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = [t^2 + 8 t^3]_1^2 = 59$.

En remarquant que $f(x, y) = x^2 + y^3$ est une primitive de $\omega = 2x dx + 3 y^2 dy$ (car on vérifie la relation $\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$) on peut aussi calculer : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(B) - f(A) = f(2 ; 4) - f(1 ; 2) = (2^2 + 4^3) - (1^2 + 2^3)$. On obtient aussi (ouf !) 59 pour résultat.

Et bien à présent, c'est parti !!!

On fait comme si on était une petite souris regardant le travail du mathématicien aux prises avec quelques questions concernant cette belle équation qu'il essaye de mieux comprendre... On va le laisser se poser des questions qui peuvent sembler naïves, mais devant un problème incompris, il faut parfois passer par ce type de questions.

Posons clairement la nature du problème qui torture notre « héros »...

La formule ne fonctionne que lorsque le chemin γ est inclus dans un ouvert étoilé. Dans ce cas, la forme différentielle ω vérifiant la condition $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, peut admettre une primitive. Dans le cas contraire, lorsque ω est définie sur un domaine non étoilé, la formule magique n'est pas vérifiée. Mais, comment le calcul de l'intégrale sait-il que le domaine est ou non étoilé ??? Qui lui explique à l'oreille : « Stop, le domaine n'est pas étoilé... on arrête le calcul !! ». Je veux comprendre en détail le pourquoi du comment de cette affaire...

J'utilise donc l'exemple bien connu $\vec{V} = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$ (cas qui pose problème d'après certaines sources sûres...). Sa forme différentielle $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ admet la primitive $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ lorsque le domaine est étoilé ! Pourquoi peut-il y avoir un souci ? Le vecteur n'est pas défini au point $O(0 ; 0)$ puisque l'on aurait un dénominateur nul... L'origine du repère est donc un point à éviter.

Petit rappel : la dérivée de la fonction arctangente est $(\arctan)'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On peut alors effectivement retrouver l'expression de \vec{V} à partir de f en effectuant deux dérivées partielles.

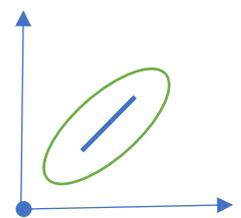
Voici mon plan de travail pour commencer :

- Vérifier que la relation $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(B) - f(A)$ fonctionne bien pour un chemin simple inclus dans un domaine étoilé où \vec{V} est bien défini. Ce sera le point I.
- Pour voir en quoi le point O pose problème, je vais étudier le cas où γ est un segment passant par O . Qu'arrivera-t-il dans un tel cas ? Ce sera le point II.
- Je ne vois rien de plus pour le moment... Il me faudra attendre les conclusions de ces deux premiers points avant d'attaquer la suite ! J'espère que personne ne sera jamais au courant de ce manque de vision à long terme... surtout pas ma cheffe ni mes étudiants !

I Chemin = le segment $[AB]$ avec $A(1 ; 1)$ et $B(2 ; 2)$.

Schéma de la situation :

Le chemin est bien inclus dans un domaine étoilé (car c'est une ellipse !)



De plus, le point problème O n'est pas dans le domaine, donc, tout est bon *a priori* !

On pose donc le long du chemin : $x(t) = t$ et $y(t) = t$ avec $t \in [1 ; 2]$.

On attaque avec : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_A^B \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_1^2 \frac{-t}{2t^2} + \frac{t}{2t^2} dt = 0$

En effet, on avait simplement $x'(t) = y'(t) = 1$, ce qui simplifie pas mal le travail...

D'un autre côté, la formule $f(B) - f(A)$ où $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ donne 0 aussi puisque pour les deux points, on a $x = y$. Ainsi : $f(B) - f(A) = -\arctan(1) - (-\arctan(1))$. Pas besoin de connaître cette fonction arctangente pour ce cas ! Info : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Bon, dans le cas de ce chemin, tout va bien, il y a bien égalité entre les deux versions du calcul. De plus, aucun problème mathématique n'a été rencontré...

Je peux passer au point II.

II Chemin = le segment $[AB]$ avec $A(-1 ; -1)$ et $B(1 ; 1)$.

Pas la peine de faire un schéma pour « voir » que le fameux point O est en plein milieu du segment !

Comme les points choisis respectent encore $x = y$, j'ai tout de suite $f(B) - f(A) = 0$.

Bon, voyons l'autre écriture... Comme j'ai encore $x(t) = y(t) = t$ tout au long du chemin, il semble clair que $-\frac{y}{x^2+y^2}dx$ sera exactement opposé à $\frac{x}{x^2+y^2}dy$ et au final, la forme différentielle sera égale à 0 sur ce chemin. Donc l'intégrale sera nulle.

Tiens ? On dirait que pour ce cas, le point O ne pose pas de problème !

Oups... Je dois peut-être regarder de plus près $\frac{\dots}{x^2+y^2}$ car le dénominateur s'annule au point O par lequel on doit passer. Ainsi, les fractions ne sont ab-so-lu-ment pas définies en ce point.

Remarques :

- en remplaçant $x(t)$ et $y(t)$ par t , on obtiendrait $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\ell = \int_{-1}^1 \frac{-t}{2t^2} + \frac{t}{2t^2} dt$ mais la fonction $t \mapsto \frac{-t}{2t^2} + \frac{t}{2t^2}$ ainsi posée, avec un dénominateur pouvant être nul, n'est pas définie pour $t = 0$ (en O). L'intégrale posée n'a donc pas de sens mathématique. Impossible d'envisager son calcul ! (bonus : complément C6 en fin de document)
- Il est impossible de trouver un domaine étoilé où la forme ω serait bien définie, car le point problème O est **sur** le chemin !! Impossible de l'exclure sans enlever une partie du chemin.

Bon, pour cette situation, je comprends bien l'origine du problème : on rencontre une intégrale avec une fonction non définie. O.K. pour ce cas...

Malgré tout, je n'ai pas perçu l'importance que le chemin puisse être inclus dans un domaine étoilé...

D'où l'étape suivante pour tester cette notion...

Comment tester le caractère étoilé du domaine ?

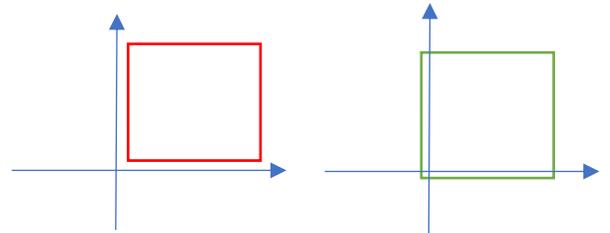
Une bonne idée serait de travailler avec des chemins en forme de cercles ne contenant pas ou contenant le fameux point O . On aura alors un domaine étoilé ou non pour notre forme différentielle qui n'est pas définie en ce point. En revanche, notre forme différentielle serait bien définie le long du cercle (notre chemin γ).

Evidemment, il faudra utiliser les coordonnées polaires le long du cercle... ce qui risque de compliquer un peu les calculs !

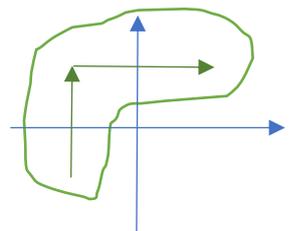
Mais au fait, je peux construire des chemins en forme de carrés ! Topologiquement, ce sera équivalent et les calculs seront simples !!

Voilà une belle idée...

Le carré rouge ne contient pas O , alors que le carré vert le contient.



C'est une bonne idée de passer sur des chemins fermés car si l'on considère un chemin ouvert du type ci-contre, on peut l'enfermer dans un domaine étoilé ne contenant pas O . On pourra alors toujours profiter du côté étoilé du domaine... ce qui ne m'intéresse pas pour mon étude !



Il faudra donc aller vers un chemin fermé.

Rappel du but cherché (plus clair dans mon esprit tout à coup...) : je dois étudier ce qui se passe, concrètement lors du calcul, lorsque l'on est sur un domaine non étoilé. Je veux voir l'origine du « bug » qui fait que les deux versions du calcul ne coïncident pas.

Mais au fait, avant, je pourrais au moins étudier un cas où le chemin serait sur un segment horizontal, juste pour voir comment s'écrit le résultat... par curiosité. Après tout, ce genre de petit travail est un peu du genre du physicien faisant des petites expériences pour tâter le terrain dans son labo.

Je prends alors un chemin rectiligne de $A(1 ; 1)$ vers $B(2 ; 1)$. On peut prendre le paramétrage : $x(t) = t$ et $y(t) = 1$ avec $t \in [1 ; 2]$. Soit : $x'(t) = 1$ et $y'(t) = 0$.

Dans ce cas : $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \frac{-1}{t^2+1^2} \times 1 + \frac{t}{t^2+1^2} \times 0 dt = \int_1^2 \frac{-1}{t^2+1} dt = [-\arctan(t)]_1^2$ ce qui donne finalement : $\arctan(2) - \arctan(1)$.

On retrouve bien la présence de la fonction arctangente, comme la primitive ! D'ailleurs, on obtient bien le même résultat avec $f(B) - f(A)$.

Remarque : le fait de travailler sur un ouvert étoilé permet (si besoin) de calculer l'intégrale sur des morceaux d'arcs qui ne contiendront pas le point O (cause de problèmes !).

Problème déjà vu : la forme n'étant pas définie au point O . Mais il doit y avoir un autre cas de problème... ça reste à voir...

Remarque : je vois ici la « puissance » de la topologie : comprendre et qualifier une situation géométrique liée à un calcul d'intégrale le long d'un chemin. Le calcul, s'il est légitime, fera bien appel à la primitive déjà discutée et le calcul sera bien identique pour les deux versions.

Reste à voir l'origine du problème qui peut arriver pour le cas du carré contenant ou non le point O .

Pour le cas du cercle, ce sera du même genre...

Mais, cela semble lié au fait qu'il faudrait que cette primitive soit légitime (définie) tout au long du chemin, en chacun de ses points ! En effet, il ne faut pas oublier qu'une intégrale doit pouvoir se découper en petites parties. On doit pouvoir écrire : $\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega$ où les portions de γ_i mises bout à bout doivent redonner le chemin γ en entier.

Il faut que, sur chaque petite portion γ_i élémentaire, le calcul de f soit légitime. Or, si l'on passe par une zone où y vaut 0, à ce moment, $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ n'a plus de sens !!

Résumons un peu !

Les sources de problème semblent être les suivantes :

- Le calcul direct de $I = \int_A^B \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ avec la paramétrisation du chemin γ pose problème lorsque la forme différentielle $\omega = \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ n'est pas définie (ex : division par 0).
- Le calcul en passant par une primitive f peut poser problème lorsque le chemin passe par un point où f n'est pas définie. Je remarque ici que le piège est de se contenter des extrémités du chemin en se disant « bon, finalement le calcul fonctionne bien ! » et ceci, en oubliant le chemin parcouru.

Finalement, je vois mieux la source des problèmes possibles d'un côté ou de l'autre du calcul...

Mais je vais poser clairement les calculs pour le cas du carré contenant le point O en bas à sa gauche, on ne sait jamais, juste pour en avoir le cœur net !

Le carré est formé de lignes où : $x \in [-a ; b]$ et $y \in [-a ; b]$ avec $a \approx 0,1$! et $b > 1$.

Version du calcul de $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$ en séparant côté par côté le long du chemin fermé. Je note les points délimitant notre carré : $A(-a ; -a)$ $B(b ; -a)$ $C(b ; b)$ $D(-a ; b)$.

De A vers B, on a : $y = -a$ qui reste constant, soit $y'(t) = 0$. Donc, il reste :

$$\int_A^B \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{-a}^b \frac{-y(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2} x'(t) dt = \int_{-a}^b \frac{a}{t^2 + a^2} dt \text{ en prenant } x(t) = t \text{ et } t \in [-a; b].$$

Pour ce calcul, il faut juste savoir que $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ avec $a > 0$.

$$\text{On obtient : } \int_A^B \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_{-a}^b = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \arctan(-1) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\pi}{4}.$$

Remarquons la parfaite légitimité du calcul (pas de division par 0 à l'horizon...).

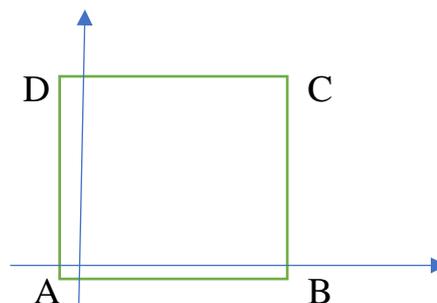
J'utilise ici : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et le fait que arctan est une fonction impaire.

Pour le côté de B vers C : on a $x(t) = b$ soit $x'(t) = 0$ et $y(t) = t$ où $t \in [-a; b]$.

$$\int_B^C \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{-a}^b \frac{x(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2} y'(t) dt = \int_{-a}^b \frac{b}{b^2 + t^2} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{b}\right) \right]_{-a}^b$$

$$\text{On obtient dans ce cas : } \int_B^C \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{-a}{b}\right) = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

Comme je suis un peu perdu, je fais un schéma !!



Ouf, j'y vois plus clair !!!

Portion de C vers D : ici $y(t) = b$ reste constant. Et attention : x va de b vers $-a$!

$$\text{On obtient : } \int_C^D \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_b^{-a} \frac{-y(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2} x'(t) dt = \int_b^{-a} \frac{-b}{t^2 + b^2} dt = \left[-\arctan\left(\frac{t}{b}\right) \right]_b^{-a}$$

$$\text{Ce qui donne : } \int_C^D \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{\pi}{4}$$

Portion de D vers A : ici $x(t) = -a$ reste fixe et y va de b vers $-a$.

$$\text{On obtient : } \int_D^A \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_b^{-a} \frac{x(t)}{(x(t))^2 + (y(t))^2} y'(t) dt = \int_b^{-a} \frac{-a}{a^2 + t^2} dt = \left[-\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_b^{-a}$$

$$\text{Ce qui donne : } \int_D^A \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Je dois à présent remettre tous ces résultats ensemble pour obtenir le résultat global pour le chemin avec ses quatre portions...

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Simple non ? Heureusement qu'on est samedi et que j'ai tout mon temps pour me refaire un petit thé à ce moment, car je pourrais très bien craquer !!!

Bon, où j'en étais ??

$$\text{Cela donne : } \int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 4\frac{\pi}{4} + 2 \left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

Mais... mais... ça me rappelle *une publication internationale* que j'avais lue l'année dernière !!! Il était dit que : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour le cas où $x > 0$.

Remarque : bien sûr, c'est un résultat assez connu pour les étudiants sérieux de première année... mais, on fait comme si j'étais un vrai mathématicien aux prises avec un méga gros problème bien costaud...

$$\text{Du coup, je peux dire : } \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et ainsi : } \int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 2\pi$$

Joli résultat !!! En fait, j'attendais plutôt un truc du genre 0 mais bon...

De l'autre côté, le calcul avec la formule astucieuse $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(\text{arrivée}) - f(\text{départ})$ va donner 0 puisque le point d'arrivée est le même que le point de départ...

Conclusion : Le premier calcul est tout à fait légitime, aucune triche n'a été utilisée. Le second calcul ne semble pas compliqué non plus ! Sauf que j'utilise une primitive non légitimée ! En effet, le domaine n'est pas étoilé pour cause du point O . Il n'y a donc pas coïncidence entre les deux résultats. Logique au final...

Petite réflexion en passant...

Que se passe-t-il en détail pour une portion de chemin vertical ? Peut-on utiliser la primitive $f = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$? En effet, si jamais on traverse la ligne où $y = 0$, cela ne pose-t-il pas problème ??? J'ai imaginé de façon peut-être un peu légère que la primitive donnée dans tous les bons articles sur ce sujet était valide... Mais ai-je eu raison ?

OUPS : ce samedi midi, j'ai un repas avec des anciens amis de la fac... Il va falloir que j'y aille ! Je vais devoir laisser ces questions en suspens jusqu'à ce soir..... Horrible !!!

(Tout ceci est véridique !!!)

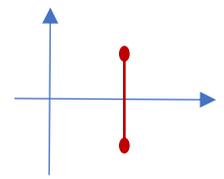
Bon, c'est reparti ! Point info : le repas a été super sympa, ça fait du bien quand même de penser à autre chose dans un milieu vitalisant (coucou et merci les amis !!!)...

En me préparant pour aller au repas, j'ai pensé tout à coup au cas où le chemin restait sur l'axe des abscisses de $A(1 ; 0)$ vers $B(2 ; 0)$. Il est clair que dans ce cas, l'utilisation de la primitive $f = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ serait absurde puisque $y = 0$. Il y a un truc à creuser..... Clairement, la formule « magique » de f est à prendre avec quelques précautions !!!

Comme vous commencez à trouver le temps un peu long, je vais aller directement à un point intéressant, auquel j'ai pensé après *quelques* calculs....

Un chemin pas sympa...

Etudions un chemin vertical de A vers B avec $A(1 ; -a)$ et $B(1 ; a)$ où $a > 0$.



Logiquement, en regardant le calcul de $\int_{\gamma} \omega$ comme le calcul du travail d'une force le long du chemin, lorsque les points A et B vont se rapprocher, le travail va tendre vers 0. En effet, on a une force bien définie en tout point d'un chemin dont la longueur tend vers 0. On va maintenant étudier ceci avec les deux tactiques :

- En calculant $\int_{\gamma} \omega$ avec soin, avec une primitive adaptée à ce chemin.
- En calculant $\int_{\gamma} \omega = f(B) - f(A)$ avec la fameuse primitive « suspecte » dont je rappelle la formule pour ceux qui s'étaient un peu endormis : $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

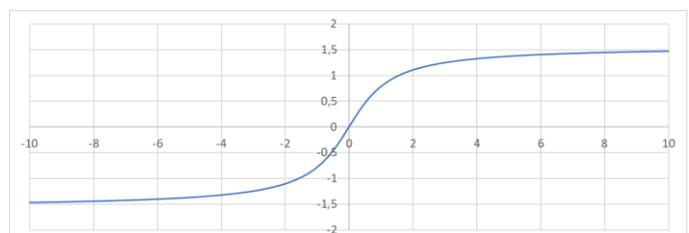
Let's go !

1) Sur ce chemin, x reste égal à 1. Donc la forme différentielle $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ se simplifie en $\omega = \frac{1}{1^2+y^2} dy$. Soit $\omega = \frac{1}{y^2+1} dy$ dont une primitive est $f = \arctan(y)$.

Ainsi : $\int_{\gamma} \omega = f(B) - f(A) = \arctan(a) - \arctan(-a) = 2 \arctan(a)$.

Ce résultat tend bien vers 0 lorsque a tend vers 0. Un bon point !

La fameuse fonction $x \mapsto \arctan(x)$ dont je vous parle depuis quelques temps est représentée ci-contre. Elle est impaire, vaut donc 0 lorsque x est nul et sa limite est $\frac{\pi}{2}$ vers l'infini à droite.



2) En prenant « bêtement » la primitive $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ avec $x = 1$, on obtient la relation : $\int_{\gamma} \omega = f(B) - f(A) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right) + \arctan\left(\frac{1}{-a}\right) = -2\arctan\left(\frac{1}{a}\right)$.

On remarque alors, avec $\lim_{a \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$, que la limite de $\int_{\gamma} \omega$ tend ici vers $-\pi$.

Conclusion de cette expérience

La primitive $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ n'est clairement pas adaptée pour le calcul de l'intégrale $\int_{\gamma} \omega$ sur certains chemins ! Cet avertissement n'est pas toujours bien clairement présenté dans les articles sur ce sujet.... D'où certaines angoisses !

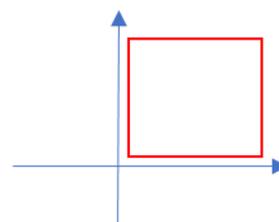
Un chemin traversant la ligne où y est nulle pose clairement un gros problème pour la primitive proposée sans trop de commentaires un peu partout !

Un dernier calcul pour se rassurer...

Je vais ici, pour me faire plaisir, calculer $\int_{\gamma} \omega$ où γ est :

On utilise ici : $A(a ; a)$ $B(b ; a)$ $C(b ; b)$ $D(a ; b)$

On laisse bien le point O en dehors du domaine de travail, et on a : $0 < a < b$.



Pour info, le chemin étant fermé, le résultat attendu doit être $\int_{\gamma} \omega = 0$. Sur ce domaine étoilé, la primitive « suspecte » est cette fois tout à fait légitime et donne bien un résultat nul en 5 secondes ! Mais bien sûr, je vais tout calculer morceau par morceau avec soin... Juste pour vérifier que tout va bien, on ne sait jamais !!! En mode « abrégé », cela donne :

$$A \text{ vers } B : \omega = \frac{-a}{x^2+a^2} dx \text{ d'où : } \int_A^B \omega = \int_a^b \frac{-a}{t^2+a^2} dt = \left[-\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_a^b = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$B \text{ vers } C : \omega = \frac{b}{b^2+y^2} dy \text{ d'où : } \int_B^C \omega = \int_a^b \frac{b}{t^2+b^2} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{b}\right) \right]_a^b = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$C \text{ à } D : \omega = \frac{-b}{x^2+b^2} dx \text{ d'où : } \int_C^D \omega = \int_b^a \frac{-b}{t^2+b^2} dt = \left[-\arctan\left(\frac{t}{b}\right) \right]_b^a = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$D \text{ vers } A : \omega = \frac{a}{a^2+y^2} dy \text{ d'où : } \int_D^A \omega = \int_b^a \frac{a}{t^2+a^2} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_b^a = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Au final, on obtient pour le chemin fermé :

$$\int_{\gamma} \omega = \pi - 2 \left\{ \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \right\} = \pi - 2 \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} = 0 \quad \text{ouf, on trouve bien 0 !!!}$$

Pour finir, quelques réflexions...

Voilà, vous avez suivi un apprenti-mathématicien au cours d'un long week-end de quatre jours ! Le plan soigneusement mis en place était vraiment une bonne idée... Mais il a rapidement volé en éclats pour laisser la réflexion partir dans tous les sens avec de nombreuses questions ! Il a aussi fallu pas mal de temps pour digérer les résultats intermédiaires, remettre en cause certains résultats présentés sans trop de détails...

Devant une situation complexe, la réponse est rarement simple !!!

En général, les mathématiciens donnent un travail final soigné, bien ordonné sans laisser voir toutes les difficultés du travail que vous avez pu percevoir dans ces quelques pages. Je pense d'un seul coup à un livre de Cédric Villani : « Théorème vivant ». Il avait raconté l'aventure lui ayant permis d'obtenir la médaille Fields, la plus haute récompense pour un vrai mathématicien. Le livre racontait un cheminement semé de péripéties... Il permet de comprendre la façon de travailler d'un tel personnage au jour le jour.

Autre illustre mathématicien dont on peut suivre les aventures : Andrew Wiles dans le livre de Simon Singh « Le dernier théorème de Fermat ». On découvre les difficultés de Wiles pour parvenir à son rêve.

En voilà de bons conseils de lecture pour approfondir la question de départ « Au fait, c'est quoi « être mathématicien » ? ».

Annexe :

Voici quelques petits compléments !

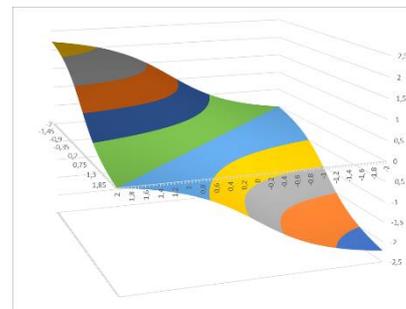
C1 J'ai focalisé notre attention sur $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, la primitive donnée usuellement. De plus, lors de certains calculs, on a vu apparaître une autre primitive pour les chemins « verticaux » : $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Notons ici que ces deux formules sont très proches... On a en effet : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$. Il est donc possible, pour les cas où x et y sont tous deux positifs et non nuls d'écrire : $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Une primitive étant définie à une constante près, on peut donc finalement dire que dans le quadrant caractérisé par $0 < x$ et $0 < y$ (en haut à droite dans le plan !) où on a pas mal travaillé, les relations suivantes sont équivalentes pour le calcul de $\int_{\gamma} \omega$:

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{2} \text{ qui sera équivalent à } f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{ou bien encore } f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

C2 Dans le cas d'un chemin vertical sur $x = 1$, j'ai utilisé la primitive $f = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ qui devient, avec $x = 1$, simplement : $f = \arctan(y)$.

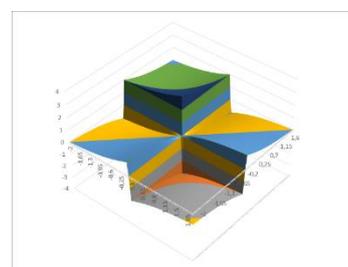


Le calcul de $\int_{\gamma} \omega$ conduit alors, en fonction des points $A(1 ; x)$ et $B(1 ; y)$ choisis, à la formule : $\int_{\gamma} \omega = \arctan(y) - \arctan(x)$.

Le passage sur la ligne $y = 0$ ne pose aucun problème de discontinuité. Les valeurs de x et y peuvent ici être positives ou négatives...

Vous en voyez la jolie représentation graphique ! Je ne voulais pas vous en priver... Après tout, les mathématiques sont aussi un univers de beauté graphique.

C3 Dans le cas du chemin vertical sur $x = 1$, j'ai utilisé la primitive $f = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ qui devient (avec $x = 1$) : $f = \arctan\left(\frac{1}{y}\right)$.



Le calcul de $\int_{\gamma} \omega$ conduit alors en fonction des points $A(1 ; x)$ et $B(1 ; y)$ choisis, à la formule : $\int_{\gamma} \omega = -\arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Le passage sur la ligne $y = 0$ pose un joli problème de discontinuité. De même, lorsque le produit xy change de signe, cela pose problème. D'où les quatre zones distinctes.

Vous en voyez la jolie représentation graphique ! Je ne voulais pas vous en priver... Après tout, les mathématiques sont aussi un univers de beauté graphique. Ah, merci à la fonction « Copier-Coller » pour ce complément **C3** !!!

C4 En électromagnétisme, certaines formules sont utiles... On rencontre parfois celle de Stokes : $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Les intégrales curvilignes sont présentes...

C5 Un conseil pour clore ce chapitre : si un jour vous rencontrez au détour d'un exercice la fonction $f(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$: « Fuyez, pauvre fou !! » (les dernières paroles de Gandalf le Gris à son ami Frodon).

C6 Et si on posait $g: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{sur } \mathbb{R}^* \\ +\infty & \text{en } x = 0 \end{cases}$, que donnerait $\int_{\mathbb{R}} g$? Ici, on aurait au moins une fonction définie partout, même si $g(0) = +\infty$ semble bizarre... La théorie des distributions peut répondre à cette belle question... mais on sortirait du cadre !

P.S. Un grand bravo à ceux qui sont encore là pour lire cette dernière ligne ! Bel effort de concentration de votre part...